微分形式とその外微分

ここでの解説は「とりあえずわかる」ことを目的にしているため、結果としては正しいが、数学的には必ずしも適切とはいえない記述が定義などに多く含まれているので注意すること。

以下では $\boldsymbol{R}^3$ の座標を (x_1, x_2, x_3) で表す（もし座標を (x, y, z) で表すのであれば、例えば $\mathrm{d}x_1$ は $\mathrm{d}x$ に変わる)。

定義（微分形式）.

1) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 0-形式とは、$\boldsymbol{R}^3$ 上の函数のこととする。
2) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 1-形式とは、$\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3$ に $\boldsymbol{R}^3$ 上の函数をかけたものの和 $f\mathrm{d}x_1 + g\mathrm{d}x_2 + h\mathrm{d}x_3$ のことである。
3) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 2-形式とは、$\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ に $\boldsymbol{R}^3$ 上の函数をかけたものの和 $f\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + g\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + h\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ のことである。
4) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 3-形式とは、$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ に $\boldsymbol{R}^3$ 上の函数をかけたもの $f\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ のことである。

$\boldsymbol{R}^3$ 上の p-形式（$p = 0, 1, 2, 3$）を総称して微分形式という。係数に現れる函数が全て C^∞ 級である微分形式を C^∞ 級の微分形式という（C^∞ 級であることを単に「滑らかである」ということも多い)。

注意. D が $\boldsymbol{R}^3$ の開集合であるとき、D 上の微分形式も同様に定まる（係数に現れる函数の定義域が D になる)。

定義. $\boldsymbol{R}^3$ 上の p-形式全体を $\Omega^p(\boldsymbol{R}^3)$ とあらわす。

注意. $\Omega^p(\boldsymbol{R}^3)$ は自然に $\boldsymbol{R}$-線型空間となる。更に、f を $\boldsymbol{R}^3$ 上の滑らかな函数、ω を p-形式とすると、$f\omega$ は係数として現れる函数に一斉に f をかけることで定まる。

例. 2-形式

$$\omega = x_1^2 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_1x_2x_3 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + x_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

と $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ の積 $f\omega$ は

$$\begin{aligned} &(f\omega)(x_1, x_2, x_3) \\ =&e^{x_1+x_2+x_3} x^2 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + e^{x_1+x_2+x_3} x_1x_2x_3 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + e^{x_1+x_2+x_3} x_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

で与えられる。

$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ はあたかも $\mathrm{d}x_1$ と $\mathrm{d}x_2$ から何らかの操作によって得られているように書いているが、実際にそうである。つまり、次のように定める。

定義（外積）． ω を p-形式、μ を q-形式とする。このとき、ω と μ の外積 $\omega \wedge \mu$ を次のように定める。

1) $p=0$ 若しくは $q=0$ のとき。このときは、$p=0$ であれば ω は函数であるから、μ の係数に ω を一斉に掛けたものを $\omega \wedge \mu$ と定める。この場合には $\omega \wedge \mu$ を単に $\omega\mu$ とも書く。

2) 一般のとき。

 i) まず、$(\mathrm{d}x_1) \wedge (\mathrm{d}x_2)$ は文字通り $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ とする。$\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ などについても同様。

 ii) $\underline{\omega,\, \mu\text{ が 1-形式の時には}}$ $\omega \wedge \mu = -\mu \wedge \omega$ であると定める。従って特に、

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 &= -\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3,\\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 &= -\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_3,\\ \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 &= -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

 であって、一方

$$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_3 = 0$$

 である（なぜなら、$\omega = \mu = \mathrm{d}x_1$ とすれば、$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1$ となるからである）。

 iii) ３つ以上の $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3$ の外積については、隣り合うもの２つずつを組にして上の規則 ii) を当てはめる。例えば、

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 =&(\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2) \wedge \mathrm{d}x_1 = (-\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3) \wedge \mathrm{d}x_1\\ =&-\mathrm{d}x_2 \wedge (\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1) = -\mathrm{d}x_2 \wedge (-\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3)\\ =&\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 = (-\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) \wedge \mathrm{d}x_3\\ =&-\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\end{aligned}$$

 とする。

 iv) 一般には多項式の要領で、$\underline{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3}$ **の順序を入れ替えるときには上の規則** iii) **に注意して** $\omega \wedge \mu$ を定める。例えば $\omega = f_1\mathrm{d}x_1 + f_2\mathrm{d}x_2 + f_3\mathrm{d}x_3$, $\mu = g_1\mathrm{d}x_1 + g_2\mathrm{d}x_2 + g_3\mathrm{d}x_3$ とするとき、$\omega \wedge \mu$ は

$$\begin{aligned}&\omega \wedge \mu\\ =&f_1g_1\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_1g_2\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_1g_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3\\ &+ f_2g_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_2g_2\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_2g_3dy \wedge \mathrm{d}x_3\\ &+ f_3g_1\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_3g_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_3g_3\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_3\\ =&(f_2g_3 - f_3g_2)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + (f_3g_1 - f_1g_3)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + (f_1g_2 - f_2g_1)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

 で与えられる。

上の計算のように、実は $\wedge$ については結合則や分配則がなりたつ。

命題． 外積について次が成り立つ。

1) $\omega_i \in \Omega^p(\boldsymbol{R}^3)$, $\mu_j \in \Omega^q(\boldsymbol{R}^3)$, $\alpha_i, \beta_j \in \boldsymbol{R}$ とするとき

$$\begin{aligned}&(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2) \wedge (\beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2)\\ =&\alpha\beta\omega_1 \wedge \mu_1 + \alpha_1\beta_2\omega_1 \wedge \mu_2 + \alpha_2\beta_1\omega_2 \wedge \mu_1 + \alpha_2\beta_2\omega_2 \wedge \mu_2\end{aligned}$$

2) $\omega \in \Omega^p(\boldsymbol{R}^3)$, $\mu \in \Omega^q(\boldsymbol{R}^3)$ とするとき、$\omega \wedge \mu = (-1)^{pq}\mu \wedge \omega$

3) $\omega \in \Omega^p(\boldsymbol{R}^3)$, $\mu \in \Omega^q(\boldsymbol{R}^3)$, $\nu \in \Omega^r(\boldsymbol{R}^3)$ とするとき $(\omega \wedge \mu) \wedge \nu = \omega \wedge (\mu \wedge \nu)$

要するに、外積はほとんど普通の掛け算であるが、$\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$ の掛け算の順番を変えると符号が変わるという点で異なる。

微分形式に対しては次のように外微分という操作が定まる。

定義（外微分）． $\omega \in \Omega^p(\boldsymbol{R}^3)$ について、$\mathrm{d}\omega$ を以下のように定める：

1) $p = 0$ のとき。0-形式は函数であったので $\omega = f$ のとき

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x_3$$

と定める。このときには $\mathrm{d}\omega$ を $\mathrm{d}f$ とも書く（$\mathrm{grad} f$ の定義とほとんど同じであることに注意)。

2) $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_1) = \mathrm{d}(\mathrm{d}x_2) = \mathrm{d}(\mathrm{d}x_3) = 0$ とする。

3) 一般のとき。$\omega \in \Omega^p(\boldsymbol{R}^3)$, $\mu \in \Omega^q(\boldsymbol{R}^3)$ に対して

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \mu) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \mu + (-1)^p\omega \wedge (\mathrm{d}\mu)$$

と定める。

注意． $\boldsymbol{R}^3$ の点 $p = (x_1, x_2, x_3)$ について第 1 標をあたえる対応 $p \mapsto x_1$ は函数と思うことが出来る。これを再び x_1 と書くことにすると、函数 x_1 の外微分 $\mathrm{d}(x_1)$ を考えることが出来るが、これは $\mathrm{d}x_1$ に等しい。$\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$ についても同様である。

上の定義だけではよく分からないので具体的に計算してみる。

命題． 以下の式が成り立つ。

1) $\omega = f\mathrm{d}x_1 + g\mathrm{d}x_2 + h\mathrm{d}x_3$ のとき、$(p = 1)$

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial g}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

（係数が $\mathrm{rot}\left(f\dfrac{\partial}{\partial x_1}+g\dfrac{\partial}{\partial x_2}+h\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)$ と同じであることに注意。）

2) $\omega = f\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+g\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+h\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ のとき、$(p=2)$

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial g}{\partial x_2}+\frac{\partial h}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$$

（係数が $\mathrm{div}\left(f\dfrac{\partial}{\partial x_1}+g\dfrac{\partial}{\partial x_2}+h\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)$ と同じであることに注意。）

3) $\omega = f\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$ のとき、$\mathrm{d}\omega=0$ である。

証明. まず、$\omega = f\mathrm{d}x_1+g\mathrm{d}x_2+h\mathrm{d}x_3$ とする。定義より、$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x_1+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}h\wedge\mathrm{d}x_3$ である（函数は 0-形式であることと、$\mathrm{d}(\mathrm{d}x_1)=0$ などが成り立つことを使う）。一方

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x_1&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\wedge\mathrm{d}x_1\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1\\&=-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

であるから、同様に $\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}h\wedge\mathrm{d}x_3$ も計算すると 1) を得る。

$\omega = f\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+g\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+h\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ のときは、例えば

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3)=&(\mathrm{d}f)\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\\=&\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\\=&\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\end{aligned}$$

なので、ほかの項も同様に計算すれば 2) を得る。

最後に、$\mathrm{d}(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3)=0$ より $\mathrm{d}(f\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3)=(\mathrm{d}f)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$ だが、例えば $(\mathrm{d}x_1)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_1)\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=0$ なので、$\mathrm{d}(f\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3)=0$ である。 □

外微分は次の重要な性質を持つ。

定理. $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$ である。つまり、任意の p-形式 ω について $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$ が成り立つ。

証明. $p=1$ の時に示す。$\omega=f\mathrm{d}x_1+g\mathrm{d}x_2+h\mathrm{d}x_3$ とすると、

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}-\frac{\partial g}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}-\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$$

であったから、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = &\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3}\right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1}\right) \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\
&+ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}\right) \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
= &\, 0
\end{aligned}
$$

ただし、最後の等号を示す際には、$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ であることと、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$ などが成り立つことを使う。$p \neq 1$ の場合も同様である（もっと易しい）。 □

さて、今次のような対応を考える。

1) 函数 f をそのまま 0-形式とみなす。
2) ベクトル場 $X = f\dfrac{\partial}{\partial x_1} + g\dfrac{\partial}{\partial x_2} + h\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ を 1-形式 $f\mathrm{d}x_1 + g\mathrm{d}x_2 + h\mathrm{d}x_3$ とみなす。
3) ベクトル場 $X = f\dfrac{\partial}{\partial x_1} + g\dfrac{\partial}{\partial x_2} + h\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ を 2-形式 $f\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + g\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + h\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ とみなす。
4) 函数 f を 3-形式 $f\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ とみなす。

一方、函数全体を $C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, ベクトル場全体を $\mathcal{X}(\boldsymbol{R}^3)$ と書くことにすると、次のような対応がある。

$$
C^\infty(\boldsymbol{R}^3) \overset{\mathrm{grad}}{\to} \mathcal{X}(\boldsymbol{R}^3) \overset{\mathrm{rot}}{\to} \mathcal{X}(\boldsymbol{R}^3) \overset{\mathrm{div}}{\to} C^\infty(\boldsymbol{R}^3)
$$

ここで、矢印を二回つづけてたどると 0 になることに注意せよ。

この図式を上の対応で書き換えると、つぎのようになる（上段は元の図式）:

$$
\begin{array}{ccccccc}
C^\infty(\boldsymbol{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & \mathcal{X}(\boldsymbol{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \mathcal{X}(\boldsymbol{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{div}} & C^\infty(\boldsymbol{R}^3) \\
\updownarrow \text{対応 1)} & & \updownarrow \text{対応 2)} & & \updownarrow \text{対応 3)} & & \updownarrow \text{対応 4)} \\
\Omega^0(\boldsymbol{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1(\boldsymbol{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^2(\boldsymbol{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^3(\boldsymbol{R}^3)
\end{array}
$$

ここで、矢印は（矢印の向きに）どのようにたどっても結果は同じである。実際、例えば函数 f について、$\mathrm{grad} f$ を上の対応 2) によって 1-形式とみなしたものは、f を上の対応 1) によって 0-形式とみなしたものに d を施したものに等しい。あるいは、ベクトル場 X について、$\mathrm{rot} X$ を計算するときに、まず X を対応 2) によって 1-形式とみなして外微分をとり、対応 3) で再びベクトル場と見直しても同じである。

ここまでは $\boldsymbol{R}^3$ ないし $\boldsymbol{R}^3$ 内の開集合 D で話をしていたが、$\boldsymbol{R}^2$ やその中の開集合 D でも微分形式やその外積・外微分はまったく同様に定まる。この場合は上の図式は次のようになる。

まず、対応は次のようになる。

1) 函数 f をそのまま 0-形式とみなす。
2) ベクトル場 $X = f\dfrac{\partial}{\partial x_1} + g\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ を 1-形式 $f\mathrm{d}x_1 + g\mathrm{d}x_2$ とみなす。
3) 函数 f を 2-形式 $f\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ とみなす。

そして、図式は

$$
\begin{array}{ccccc}
C^\infty(\boldsymbol{R}^2) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathcal{X}(\boldsymbol{R}^2) & \xrightarrow{\Phi} & C^\infty(\boldsymbol{R}^3) \\
\updownarrow \text{対応 1)} & & \updownarrow \text{対応 2)} & & \updownarrow \text{対応 3)} \\
\Omega^0(\boldsymbol{R}^2) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1(\boldsymbol{R}^2) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^2(\boldsymbol{R}^2)
\end{array}
$$

となる。ここで、$\Phi\left(f\dfrac{\partial}{\partial x_1} + g\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right) = \dfrac{\partial g}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ である。

一般の $\boldsymbol{R}^n$ についても p-形式の概念が定まるがここでは触れない。

種々の積分定理と微分形式

微分形式を用いると、講義で扱った積分公式は全て統一的に扱うことができる。

まず、

定理 1． γ を $p, q \in D$ （D は $\boldsymbol{R}^2$ もしくは $\boldsymbol{R}^3$ の開集合）を結ぶ曲線とすると、

$$\int_\gamma \text{grad} f \cdot dr = f(q) - f(p)$$

であった。ここで、

$$\text{grad} f \cdot dr = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}f$$

であることを用いると、上の定理は微分形式を用いて

定理 1'．

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = \int_{\partial\gamma} f$$

と書き変えることができる。ここで、$\partial\gamma$ とは曲線 γ の境界を表す。つまりここでは点 p,q の組のことであるが、γ は p を出発して q に至るので、p は (-1), q は 1 の重

みを持つと約束する（もちろん逆にしたければそれはそれで辻褄をあわせることはできるが、普通はそうはしない）。そして、点上の積分は単に値をとらせることにする（若しくは Dirac 函数を掛けて積分すると見ても良い。より数学的には Dirac 測度を考える）ことにすれば、定理 1' の右辺は $f(q) - f(p)$ となる。

定理 2（グリーンの定理）.

$$\oint_\gamma (P\mathrm{d}x_1 + Q\mathrm{d}x_2) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

ここで、γ は D の境界に、常に D を左手に見る方向に向きをつけたもの。

まず左辺は既に微分形式になっていることに注意する。右辺も既にそう見えるが、最後が $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ であって、$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ でないという点で微妙に異なっている。一般に、$\boldsymbol{R}^n$ における n-形式の積分は次のように定める。

定義. $\omega = f\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 D 上の n-形式とする（とりあえず $n = 1, 2, 3$ と思っていればよい）。更に、$x_1, \cdots, x_n$ の決める $\boldsymbol{R}^n$ の向きは通常の $\boldsymbol{R}^n$ の向きと一致するとする。このとき、

$$\int_D \omega = \int \cdots \int_D f\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

と定める。ここで右辺は普通の重積分。

※本当は D と ω には数学的に少しうるさい条件が必要であるが、当面はあまり気にしなくて良い。

注意. 座標の順序を決めると、$\boldsymbol{R}^n$ の向きは次のように決まる。話を簡単にするために $n = 3$ とする。

1) (x_1, x_2, x_3) が通常の座標の場合（右手系の場合）を標準（正）の向きと言う。

2) $u = (u_1, u_2, u_3)$ を $\boldsymbol{R}^3$ の別な座標（パラメータづけ）とすると、行列

$$Du(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

（以下 (x_1, x_2, x_3) は省略する）について、常に $\det Du > 0$ 若しくは常に $\det Du < 0$ である。前者の時には u は正の向きであるといい、後者の時には負の向きであるという。

一見わざわざ左辺を微分形式で書いている意味がないように見えるが、例えば $n=2$ のとき、

$$\begin{aligned}
\int_D f\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 &= \iint_D f\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
\int_D f\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1 &= \int_D -f\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 = -\iint_D \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\
&= \int_{-D} f\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2
\end{aligned}$$

となり、この積分は D の向きをこめたものになっているという点で、今まで考えていた積分の拡張になっている。

さて、グリーンの定理に戻り、$\omega = P\mathrm{d}x_1 + Q\mathrm{d}x_2$ として $\mathrm{d}\omega$ を計算してみると、$\mathrm{d}\omega = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x_1} - \dfrac{\partial P}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ である。定義から

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 = \int_D \mathrm{d}\omega$$

である。最後に $\gamma\partial D$ には二通りに向きが入りうるが、D を左手に見る向きに方向をつけると約束すると、次を得る。

定理 2'.

$$\int_{\partial D}\omega = \int_D \mathrm{d}\omega$$

注意.

1) 定理 1' と形がまったく同じことに注意。
2) 定理 1' において、曲線 γ の端点 p, q にそれぞれ -1, $+1$ の重みを与えた。一方定理 2' においては D の境界 $\gamma = \partial D$ に向きを定めた。実は一般に n 次元の「領域」V（γ や D のようなもの）について、その境界 ∂V に向き（重み）を与える一定の方法が定まり、定理 1', 定理 2' の向きの決め方はこれにしたがっている。

定理 3（ガウスの発散定理）. S を $\boldsymbol{R}^3$ 内の閉曲面、U を S で囲まれた領域とする。

$$\oint_S A\cdot n\mathrm{d}S = \int_U \mathrm{div}A\mathrm{d}V$$

$A = a_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + a_2\dfrac{\partial}{\partial x_2} + a_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
A\cdot n\mathrm{d}S &= a_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 + a_2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1 + a_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3\\
\mathrm{div}A &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\\
\mathrm{div}A\mathrm{d}V &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3
\end{aligned}$$

であるが、

$$\mathrm{d}(a_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+a_2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+a_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3)=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$$

なので、

定理 3'. S を $\boldsymbol{R}^3$ 内の閉曲面、U を S で囲まれた領域とする。U に任意に向きをいれ、S には U から定まる向きを入れる。このとき、$\omega = a_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+a_2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+a_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3$ とすると、

$$\int_{\partial S}\omega=\int_D \mathrm{d}\omega$$

ここで、5頁の対応 3) と 4) を思い出してみる。定理3において、A は対応 3) により微分形式 $a_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+a_2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+a_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ に、$\mathrm{div}A$ は対応 4) により微分形式 $\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$ に対応する。定理3' は定理3をこの対応で書き直したと考えることも出来る。

グリーンの定理の類似は $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面と、その境界についてもなりたつ。すなわち、次が成り立つ。

定理 4（ストークスの定理）. S を $\boldsymbol{R}^3$ 内の、向きが定まった曲面、$\gamma=\partial S$ を S の境界とする。γ には S から定まる向きが入っているとする。A を S の近くで定まったベクトル場とし、n を S の単位法線ベクトルとする。このとき、次が成り立つ。

$$\int_\gamma A\cdot dr=\int_S(\mathrm{rot}A)\cdot n\mathrm{d}S=\int_S(\mathrm{rot}A)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S})$$

これを微分形式を用いて書き直してみると、次のようになる。$A=a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}+a_3\frac{\partial}{\partial x_3}$ とすると、まず左辺の積分の中身は

$$A\cdot dr=a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_2+a_3\mathrm{d}x_3$$

と書き直せる。これを ω とすれば、

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$$

である。

一方、右辺については次のようになる。φ を S の正の向きのパラメータ付けとすると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{S} =& \varphi_u \times \varphi_v \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
=& \left(\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right)\frac{\partial}{\partial x_1} \\
&+ \left(\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&+ \left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right)\frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

であった。さらに、S 上では

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 &= \mathrm{d}\varphi_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 \\
&= \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\mathrm{d}v\right) \wedge \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\mathrm{d}v\right) \\
&= \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\right)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

である（これはほとんど $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ の係数であることに注意）。一方、

$$\mathrm{rot}A = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

であったから、先の $\mathrm{d}\omega$ と比較して、φ が S の正の向きのパラメータ付けであれば７頁の微分形式の積分の定義から、等式

$$\int_S (\mathrm{rot}A)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) = \int_S \mathrm{d}\omega$$

を得る。この式をよくみると（計算の時に φ を用いるが表面上は）φ が現れない。実はこの等式自体はもし φ として負の向きのパラメータ付けを取ってしまっても成り立つ。以下ではこのことを調べる。

話を簡単にするために、$\varphi : U \to S$ を正の向きのパラメータ付け、$\psi : U' \to S$ を負の向きのパラメータ付けで、$\psi(t,s) = \varphi(s,t)$ で与えられるものとする。ここで、$U' = \{(t,s) \in \boldsymbol{R}^2 | (s,t) \in U\}$ である。言い換えれば、$(t,s) = (v,u)$ とする。すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 &= \mathrm{d}\psi_1 \wedge \mathrm{d}\psi_2 \\
&= \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial\psi_1}{\partial s}\mathrm{d}s\right) \wedge \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial\psi_2}{\partial s}\mathrm{d}s\right) \\
&= \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial s} - \frac{\partial\psi_1}{\partial s}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

一方、$\dfrac{\partial \psi_1}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \dfrac{\partial \psi_1}{\partial s} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}$ だから

$$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}s$$

である。ここで、例えば $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}$ は、φ_1 を u, v の函数と思って微分して (t, s) を代入したものである。

一方、本来の φ を用いると

$$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right) \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$

であるから、7頁の積分の定義とあわせると、$\displaystyle\int_S \mathrm{d}\omega$ の計算に際して ψ を用いてしまうと本来の値とは符号が変わったものが計算結果として得られることがわかる。

等式が成り立つことを調べるために左辺を ψ を用いて計算してみる。

$$\begin{aligned}
\psi_t \times \psi_s \mathrm{d}t\mathrm{d}s =& \frac{\partial \psi}{\partial t} \times \frac{\partial \psi}{\partial s}\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
=& \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} \right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
=& \varphi_v \times \varphi_u \mathrm{d}t\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

より、$B = b_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + b_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3}$ のとき（定理3においては $B = \mathrm{rot} A$ である）、$\varphi_v \times \varphi_u = v_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3}$ とすると（各 v_i は t, s の函数である）、

$$\int_S B \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{U'} \left(b_1 \circ \psi(t,s) v_1 + b_2 \circ \psi(t,s) v_2 + b_3 \circ \psi(t,s) v_3 \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

である。(t, s) を $(u, v) \in U$ を用いて $(t, s) = (v, u)$ と変数変換すると、最後の式は

$$\int_U \left(b_1 \circ \varphi(u,v) v_1 + b_2 \circ \varphi(u,v) v_2 + b_3 \circ \varphi(u,v) v_3 \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

と書き換えられる。$\varphi_v \times \varphi_u = -\varphi_u \times \varphi_v$ だから、これは本来の $\displaystyle\int_S B \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{S})$ とは符号が異なる。したがって、等式 $\displaystyle\int_S (\mathrm{rot} A) \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{S}) = \int_S \mathrm{d}\omega$ は（本来とは両辺とも符号が変わってしまうので）成り立つ。

しかし、このことは次のようにも理解できる。ψ は S の向きを変えたもの $-S$ の正の向きのパラメータ付けを与えている。よって、上の計算は実際には

$$\int_{-S} (\mathrm{rot} A) \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{S}) = \int_{-S} \mathrm{d}\omega$$

を正しい向きで計算していると考えるべきである。これらのことをふまえて、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

と改めて定めると、これは S にパラメータ付け φ によって定まる向きを入れたものの（無限小の）面積ベクトルになっている（したがって、先に S に向きが入っている場合には φ として正の向きものを考えないと符号がおかしくなる）。

最後に、ここまでのことをまとめると、最終的に次を得る。

定理４'. S を $\boldsymbol{R}^3$ 内の、向きが定まった曲面、∂S を S の境界とする。∂S には S から定まる向きが入っているとする。このとき、$\omega = a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2 + a_3\mathrm{d}x_3$ とすれば、

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S \mathrm{d}\omega$$

が成り立つ。

定理４の両辺を５頁の対応 2) と 3) を用いて形式的に書き直しても定理４' が得られることに注意せよ。

これらのことを全てまとめると、５頁の対応により函数やベクトル場を微分形式に対応させると、適切な読み替えにより積分は全て積分に対応し、更にはいくつかの積分定理は

定理（ストークスの定理）. ω を $\boldsymbol{R}^n$ の閉領域 D の近くで定義された微分形式とする。∂D は区分的に滑らかな「多様体」であるとする（これは区分的に滑らかな曲線や曲面の一般化である）。このとき、

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$$

が成り立つ。

と簡単な形にかける。この定理は講義で行ったグリーンの定理の証明と同様に証明される。

面積分や線積分の時には $\mathrm{d}r$ や $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ などいろいろな定義が必要であったが、微分形式の積分ではそれらは全て統一的に計算が出来る、つまり、$\omega = f\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_r$ であれば、

1) ω は $f \circ \varphi \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_r$ とみなす。ただし、φ は「多様体」（曲面や曲線）のパラメータ付け。
2) 1) で ω を読み替えたものに $\mathrm{d}\varphi_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j$ を代入して、$u_1, \cdots, u_r$ で積分する（ここで、n は D の「次元」である。D が曲線なら $n=1$, 曲面なら $n=2$ ··· となる）。

補足． 1) $\boldsymbol{R}^n$ の点 p に対して、p を座標で書いたときの第 i-成分（x_i とする）を対応させる対応は写像 $p \mapsto x_i$ と考えることができる。この写像自体を x_i と書くと、$\mathrm{d}x_i$ はこの x_i の外微分である。実は $\mathrm{d}x_i$ は各 $p \in \boldsymbol{R}^n$ において、

$$\mathrm{d}x_i \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

で定まる $\boldsymbol{R}$-線型写像の族（あつまり）であると考えることが出来る。テンソル解析という場合のテンソルとは、この $\mathrm{d}x_i$ や $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ や、それらを一般化したものを用いて記述される数学的（物理的）対象のことである。

2) グリーンの定理の説明においては最初から左辺は微分形式の積分とみなしたが、実は古典的には左辺はやはりベクトル場の積分として書かれる。これを 6 頁の対応で適宜読み替えて微分形式の積分としたと考えても良いし、ベクトル場の積分の定義を整理して微分形式の積分に至ったと考えても良い。このあたりの事情はガウスの発散定理などと同様である。

より数学的な扱いや、進んだ事柄は以下に詳しい。

参考書：多変数解析学　スピヴァック著 齋藤正彦訳 東京図書 （特に４章）

　　　　テンソル解析　田代嘉宏著 裳華房

多少古めかしいが、

　　　　微分形式の理論 およびその物理科学への応用　フランダース著 岩堀長慶訳

には多少物理のようなことも書いてある（ように見える）。