１９９７年度幾何学Ａ演習（第１回）　　　　　　　　　'97/4/16 15:00〜17:35
'97/4/20 改定

以下では関数 x, y は区分的に C^∞ 級（滑らか）と仮定する。

　孤長 s により径数づけられた $\mathbb{R}^2$（x–y 平面）内の曲線

$$l : \boldsymbol{p} = (x(s), y(s))$$

の点 $\boldsymbol{p}_0 = (x(s_0), y(s_0))$ における接ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ は

$$\boldsymbol{v}_0 = \left(\frac{dx}{ds}(s_0), \frac{dy}{ds}(s_0)\right)$$

で与えられる。これは l が C^∞ 級な（角がない）ところでは s_0 に C^∞ 級に依存するので、これを s の関数とみて $\boldsymbol{v}(s)$ と書くことにする。ここで、l は C^∞ 級で、更に $\forall s\ \boldsymbol{v}(s) \neq (0,0)$ と仮定すると、ある C^∞ 級関数 $\kappa(s)$ が存在し、

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}(s) &= \left(\frac{d^2x}{ds^2}(s), \frac{d^2y}{ds^2}(s)\right)\\ &= \kappa(s)\left(-\frac{dy}{ds}(s), \frac{dx}{ds}(s)\right)\end{aligned}$$

が成り立つ。

定義１．$\kappa(s)$ を曲線 l の曲率と言う。

定義２．l は自己交差を持たない閉曲線と仮定し、s_1 を $l(s_1) = l(0)$ となる最小の正数とする。このとき

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_1} \kappa(s) ds$$

で決まる数を閉曲線 l の回転数と言う。m は l が滑らかなら（角がなければ）必ず整数値をとる。

問題１．向きがわかるように次の曲線のグラフを書いて、回転数を求めよ。

1) $(x(s), y(s)) = (\cos s, \sin s),\ 0 \leq s \leq 2\pi$
2) $(x(s), y(s)) = (\cos s, -\sin s),\ 0 \leq s \leq 2\pi$
3) $(x(s), y(s)) = \begin{cases} (1-\sin s, 1-\cos s), & 0 \leq s \leq \dfrac{\pi}{2} \\ (-1+\sin s, 1+\cos s), & \dfrac{\pi}{2} \leq s \leq \pi \\ (-1-\sin s, -1-\cos s), & \pi \leq s \leq \dfrac{3\pi}{2} \\ (1+\sin s, -1+\cos s), & \dfrac{3\pi}{2} \leq s \leq 2\pi \end{cases}$
4) $(x(s), y(s)) = \begin{cases} (\cos s, \sin s), & 0 \leq s \leq \pi \\ (s-\pi-1, 0), & \pi \leq s \leq \pi + 2 \end{cases}$

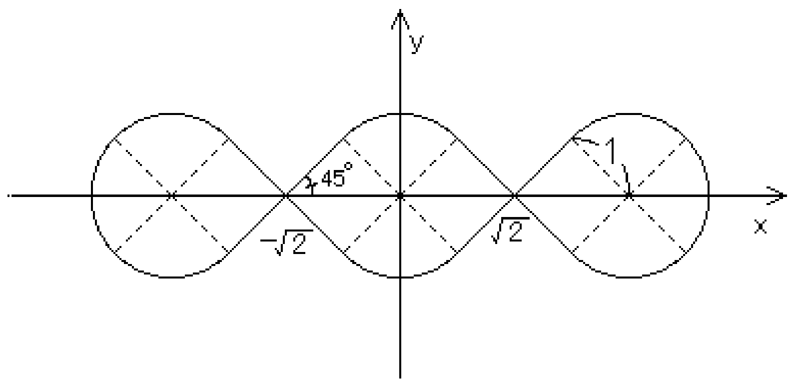
注意．l には角があると、回転数が整数にならないことがあるが、角がなければ自己交差はあってもよい。この時回転数の定義は少し修正する必要があるが、それは練習問題。

問題２．向きがわかるように次の曲線のグラフを書いて、回転数を求めよ。

1) $(x(s), y(s))$

$$
= \begin{cases} \left(\dfrac{-s+1}{\sqrt{2}}, \dfrac{s-1}{\sqrt{2}}\right), & 0 \le s \le 2 \\ \left(\cos(s-2+\dfrac{\pi}{4}) - \sqrt{2}, \sin(s-2+\dfrac{\pi}{4})\right), & 2 \le s \le 2+\dfrac{3\pi}{2} \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(s-3-\dfrac{3\pi}{2}), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(s-3-\dfrac{3\pi}{2})\right), & 2+\dfrac{3\pi}{2} \le s \le 4+\dfrac{3\pi}{2} \\ \left(\cos(-s+4+\dfrac{9\pi}{4}) + \sqrt{2}, \sin(-s+4+\dfrac{9\pi}{4})\right), & 4+\dfrac{3\pi}{2} \le s \le 4+3\pi \end{cases}
$$

2) 図の図形



回転数を使うと、

l_1 : $(x(s), y(s)) = (\cos s, \sin s)$, $0 \le s \le 2\pi$
l_2 : $(x(s), y(s)) = (\cos s, -\sin s)$, $0 \le s \le 2\pi$

を考えたとき、l_1 を連続的に、（自己交差を許して）滑らかな閉曲線のまま変形しても向きを込めて l_2 に重ねることができないことがわかる。